KVADRATISKA LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM. CRAMERS REGEL

KVADRATISKA LINJÄRA EKVATIONSSYSTEM.

Ett system med lika många ekvationer som obekanta kallas **kvadratiskt.**

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

(1)
Systemet har **precis en lösning** om och endast om systemets determinant är skild från 0, dvs

$$
\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .
$$

(2) Om det(A) = 0 då har systemet antingen ingen lösning eller oändligt många lösningar, som vi kan undersöka med Gaussmetoden.

det(A)≠0	**precis en lösning**
det(A)=0	**antingen oändligt många lösningar eller ingen lösning**

Exempel 1.

För vilka värden på a har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$
\begin{cases} ax + a\,y + z = 7 \\ 3x - a\,y + z = 1 \\ 3x \quad + z = 4 \end{cases}
$$

A) en entydig lösning
B) oändligt många lösningar
C) ingen lösning

Lösning:
Systemets determinant är $\det(A) = 3a - a^2$.

$$3a - a^2 = 0 \Rightarrow \; a = 0 \text{ eller } a = 3$$

Vi undersöker systemet för a=0 och a=3
För a=0 får vi systemet

$$
\begin{cases} z = 7 \\ 3x + z = 1 \\ 3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{ (t ex Gaussmetoden)}
$$

$$\begin{cases} z = 7 \\ 3x \quad = -6 \\ 0 = \ -3 \end{cases}$$. Systemet saknar lösning

För a=3 får vi systemet

$$\begin{cases} 3x + 3y + z = 7 \\ 3x - 3y + z = 1 \\ 3x \quad + z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 3y + z = 7 \\ -6y = -6 \\ -3y = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 3y + z = 7 \\ y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Vi har två ledande variabler x och y. Variabeln z varierar fritt och därför har systemet oändligt många lösningar. Vi kan införa beteckning, $z=t$ och skriva lösningen på följande form:
$x = (4-t)/3$, $y = 1$, $z = t$
Svar a)

A) En entydig lösning om a $\neq$0 och a $\neq$3
B) Oändligt många lösningar om a=3
C) Ingen lösning om a=0

Exempel 2.
För vilka värden på *a* har ekvationssystemet (med avseende på x, y och z)

$$\begin{cases} ax + y + z \quad = 3 \\ 3x - ay + z \quad = 1 \\ 3x \quad + y + 2z = 4 \end{cases}$$

A) en entydig lösning
B) oändligt många lösningar
C) ingen lösning

Lösning:

Systemets determinant är $D = 2a - 2a^2$.
$2a - 2a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ eller $a = 1$
Vi undersöker systemet för a=0 och a=1
För a=0 får vi systemet

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{(t ex Gaussmetoden med y som ledande variabel)}$$

$$\begin{cases} y + z = 3 \\ 3x + z = 1 \\ 3x + z = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + z = 3 \\ z + 3x = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Systemet har oändligt många lösningar om a=0.

För a=1 får vi systemet

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ 3x-y+z &= 1 \\ 3x+y+2z &= 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -4y-2z &= -8 \\ -2y-z &= -5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -2y-z &= -4 \\ -2y-z &= -5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -2y-z &= -4 \quad (\text{ ingen lösning}) \\ 0 &= -1 \end{cases}$$

Alltså saknar systemet lösning om a=1

A) En entydig lösning om $a \neq 0$ och $a \neq 1$
B) Oändligt många lösningar om a=0
C) Ingen lösning om a=1

Exempel 3.
För vilka värden på a har ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x+ay-az = -1 \\ x+3y-az = 1 \\ x-y+z = 1 \end{cases}$$

A) Precis en lösning
B) Oändligt många lösningar
C) Inga lösningar

Svar :

$$Det(A) = \begin{vmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & 3 & -a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3.$$

$A)\quad a \neq 1, \quad a \neq 3 \Rightarrow entydiglösning$,

$B)\quad a = 1 \quad eller a = 3$. $\Rightarrow$ *oändligt många lösningar*

(*Fallet C kan inte förekomma.*)

CRAMERS REGEL

Cramers regel kan användas för att lösa ett kvadratiskt system
endast om systemets determinant är skild från 0.

Betrakta systemet

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Om $D \neq 0$ då gäller

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \cdots$$

där

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

Exempel 4.

2. Lös med Cramers regel följande systemet

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ x + y + 2z = 7 \end{cases}$

Lösning:

a) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (OK med Cramers regel),

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{1} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

Svar: a) x=1, y=2, **b)** x=5, y=1, **c)** x=3, y=2, z=1